Probabilidades y Estadística (C)

1. La división de obras y catastro de la Ciudad de Buenos Aires está interesada en realizar un estudio sobre los dispositivos de seguridad en los locales bailables. Un buen indicador de la rapidez en una evacuación es la máxima distancia (Y) a la salida de emergencia. Se encontró que esta distancia (medida en metros) está dada por una variable aleatoria Y con distribución exponencial de parámetro 0,1. Se eligen al azar 64 locales bailables. Si el promedio de dichas distancias es menor a 8 metros se considerará que salvo excepciones los locales presentan buenos sistemas de seguridad y se habilitarán en su totalidad, mientras que si el promedio es superior a 12 se rechazarán todos los pedidos de habilitación. En caso de que no ocurra ninguna de las dos posibilidades anteriores, se enviará un inspector a cada local para analizar personalmente la habilitación del local.

   a) Calcular de manera aproximada la probabilidad de que se deba enviar un inspector a cada local.
   b) ¿Cuántos locales deben elegirse al azar para *garantizar* que la probabilidad de tener que enviar a un inspector a cada local esté acotada inferiormente por 0.93?

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad dada por

$$f(x, \beta) = \frac{5x^4}{\beta} e^{-\frac{x^5}{\beta}} I_{(0,+\infty)(x)}\,, \qquad \beta > 0\,.$$

   a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de β.
   b) Decidir si el estimador calculado en el ítem anterior es insesgado o asintóticamente insesgado. ¿Es este estimador consistente? Justifique. *Sugerencia*: Hallar la distribución de $Y = X_1^5$.
   c) Suponga $\beta = 2$. Hallar n que garantice que

$$P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^5 - 2n\right)^2 > 9n^2\right) \leq 0{,}01\,.$$

3. Se supone que la longitud de cierto tipo de vigas tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se midieron 20 elegidas al azar y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 205 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{20} (x_i - 10{,}25)^2 = 5\,.$$

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto 0,95 para μ.
   b) Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto 0,95 para σ^2.

4. Un contratista encarga un gran número de vigas de acero con longitud promedio de 5 metros. Se sabe que la longitud de una viga se halla normalmente distribuida con un desvío estándar de 0,02 metros. Después de recibir el embarque, el contratista selecciona 16 vigas al azar y mide sus longitudes para decidir si acepta o rechaza el encargo. Él desea que la probabilidad de rechazar un embarque bueno sea de 0,04.

   a) Construir un test que permita decidir entre rechazar o no el embarque. Establecer las hipótesis del test, dar el estadístico, mencionar su distribución bajo H_0 y dar la región de rechazo. Supongamos que el promedio de las 16 longitudes medidas dio 4,87 metros. En base a esta muestra ¿Qué decisión toma el contratista?
   b) Si la longitud de promedio real es de 4,98 metros. ¿Cuál es el error de Tipo II asociado a este test?